**Лабораторная работа №9**

**КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ**

**9.1. Цель работы:** изучение косвенных измерений

**9.2. Краткое теоретическое введение**

Методика обработки результатов косвенных измерений установлено в рекомендациях МИ 2083-90 «ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей» [9.4.1]. При косвенных измерениях искомое значение ФВ находят расчетом на основании измерения других величин, связанных с измеряемой величиной известной зависимостью

(9.1)

где – подлежащие прямым измерениям аргументы функции А.

Поскольку каждый из аргументов измеряется с некоторой погрешностью, то задача оценивания погрешности результата сводиться к суммированию погрешностей измерения аргументов.

Рассмотрим оценку результата измерения и характеристик погрешностей при косвенных измерениях с линейной зависимостью между оцениваемой величиной и измеряемыми аргументами и отсутствием корреляции (взаимной связи) между погрешностями аргументов. Искомая величина А связана с mизмеряемыми аргументами уравнением

(9.2)

где – постоянные коэффициенты.

Учитывая, что корреляция между погрешностями измерений отсутствует, результат измерения определяет по формуле

(9.3)

где – результат измерения с введенными поправками на симметрические погрешности.

Среднее квадратическое отклонение результата косвенных измерений

, (9.4)

где – СКО результата измерений аргумента .

Доверительные границы случайной погрешности при условии, что погрешности результатов измерений распределены по нормальному закону, вычисляют по формуле

, (9.5)

где – коэффициент Стьюдента, соответствующий доверительной вероятности Р и числу степеней свободы *f:*

(9.6)

Здесь – число измерений при определении аргумента .

Доверительные границы неисключённой систематической погрешности результата косвенного измерения и сумму и для получения окончательного значения рекомендуется вычислять с использованием формул:

, , , ,

(см. лаб. работу №4), в которых нужно заменить на .

При этом неисключенную погрешность определяют по следующей формуле

(9.7)

Оценка результата измерения и характеристик погрешности при косвенных измерениях с нелинейной зависимостью между оцениваемой величиной и измеряемыми аргументами и отсутствием корреляции между погрешностями аргументов проводится с использованием метода линеаризации путем разложения нелинейной функции в ряд Тейлора:

, (9.8)

где – первая производная от функции по аргументу вычисляемая в

точке ;

– отклонение единичного результата измерения от его среднего арифметического значения;

- остаточный член.

Метод линеаризации допустим, если можно пренебречь остаточным членом , что возможно при

(9.9)

где –СКО случайных погрешностей результата измерений – го аргумента.

Отклонения при этом должны быть взяты из возможных значений погрешностей такими, чтобы они максимизировали R.

Результат измерений вычисляют по следующей формуле:

. (9.10)

Среднее квадратическое отклонение случайной погрешности результата косвенных измерений рассчитывают по формуле

(9.11)

Доверительные границы случайной и неисключенной систематической погрешностей результата измерений находят соответственно по формулам

(9.5) и (9.7), заменяя коэффициент на . Погрешность результата измерений оценивают так же, как при определении погрешности в случае косвенных измерений с линейной зависимостью между оцениваемой величиной и измеряемым аргументами.

В технических измерениях для определения результата и погрешности измерения можно использовать подход, основанный на методе математического программирования, который сводит аналитическую задачу к вычислительной [9.4.2]. За результат измерения принимается полусумма максимального и минимального значений функций А:

(9.12)

а абсолютная погрешность определяется размахом (полуразностью) этих значений

(9.13)

В этом случае в информации о законе распределения аргументов нет необходимости.

При вычисления среднего арифметического неравноточных измерений предпочтение следует отдавать измерениям, выполненным с наибольшей точностью. Для этого каждому результату приписывают определенный «вес», т.е. число, характеризующее степень доверия к тому или иному отдельному результату измерений, входящему в ряд неравноточных измерений.

Тогда при неравноточных измерениях, с весами результатов равноточных измерений в качестве результата принимают среднее взвешенное значение величины. Его определяют по следующей формуле:

(9.14)

где – среднее арифметического ряда равноточных измерений:

…; (9.15)

где – единичное измерение (j=1,2,…, n)в ряду равноточных измерений;

– число измерений в -м ряду равноточных измерений;

– число рядов равноточных измерений.

Вес результата -го ряда равноточных измерений определяют по формуле

(9.16)

где , – объем и дисперсия -го ряда равноточных измерений соответственно;

- любое, отличное от нуля число.

Обычно выбирают таким образом чтобы

Среднюю квадратичную погрешность результата измерений среднего взвешенного значения определяют по формуле

(9.17)

Далее обработку ведут как для равноточных измерений, подставляя в формулы вместо и значения и.

Для проверки равноточности двух рядов измерений используют дисперсионный критерий Фишера [9.4.3]. При этом вычисляют дисперсии и для каждого ряда измерений, а затем находят дисперсионное отношение Фишера:

(9.18)

причем необходимым условием является . Измерения считаются неравноточными, если попадает в критическую область: . Значения для различных уровней значимости и числа степеней свободы и, где и – число измерений в первом и во втором ряду измерений соответственно, приведены в приложении 1.

**9.3. Методика и порядок выполнения работы**

9.3.1. Приборы и принадлежности: мензурка, электронные весы,исследуемые тела.

9.3.2. Определить полностью материала в системе единиц СГС по результатам измерений объема V (объема вытесненной в мерной мензурке жидкости) и массы m(с помощью электронных весов) двух образцов, изготовленных из анализируемого материала [9.4.3].

9.3.3. Провести 10 измерений объема и 16 измерений массы первого образца. Найти:

* среднее арифметическое значение массы образца
* среднее арифметическое значение объема образца
* СКО ряда измерений массы
* СКО ряд измерений объема

9.3.4. Провести 12 измерений объема и 12 измерений массы второго образца. Найти:

* среднее арифметическое значение массы образца
* среднее арифметическое значение объема образца
* СКО ряда измерений массы
* СКО ряд измерений объема

*Зависимость между плотностью, массой и объема определяется формулой V. Чтобы воспользоваться этой формулой для оценки действительного значения плотности материала необходимо определить средние из двух рядов измерений (для двух образцов) значения массы и объема. Для этого необходимо поверить равноточность результатов измерений в этих рядах.*

9.3.5. Составить дисперсионное отношение по формуле (9.18) для рассматриваемых рядов измерений массы и объема образцов (и).

9.3.6. Найти критическое значение критерия Фишера из прил.1 для (для вероятности р=0,95) для массы и объема.

9.3.7. Сравнить и и и сделать выводы.

9.3.8. Среднее значение массы , *г*можно рассчитать как среднее арифметическое из масс двух образцов.

9.3.9. Среднее значение объема V можно рассчитать как среднее взвешенное значение их объемов . Для расчета :

1. нужно определить веса рядов измерений и с помощью формулы (9.16);
2. полагая что , нужно найти С;
3. воспользовавшись формулой (9.14) вычислить среднее взвешенное значение .

9.3.10. Оценить действительное значение плотности материала, г/ ,

как:

9.3.11. Определите СКО погрешности этой оценки. Для этого:

а) предварительно рассчитайте значения частных производных функции V по и при и ;

б) вычислите по формулам (исходя из положений теорий вероятностей [9.4.4], дисперсия суммы независимых случайных величин равна арифметической сумме дисперсий этих величин или ) и (9.17) дисперсии погрешностей оценок для , и для ,

9.3.12. Воспользовавшись формулой (9.11) подсчитайте оценку СКО погрешности результата косвенных измерений, *г*/ : .

9.3.13. При условии, что систематические погрешности при измерениях были полностью исключены и распределение погрешностей –нормальное (такое допущение в рассматриваемом случае вполне оправдано, поскольку при расчетах были объединены четыре ряда измерений), найти доверительные границы случайной погрешности по формуле (9.5) с вероятностью Р=0,95 ()

9.3.14. Напишите результат измерения в следующем виде: () г/.

**9.4. Литература**

9.4.1. МИ 2083-90 «ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей»

9.4.2. Сергеев А.Г., Латышев Н.В., Тегеря В.В. Метрология, стандартизация и сертификация: Учеб. пособие 2-е изд. перераб. и доп/М.: Логос, 2005.

9.4.3. Рейх Н.И., Туниченков А.А., Цейтлин. Метрологическое обеспечение производства: Учеб. пособие для ВИСМ / под ред. Л.К. Исаева.М.: Изд-во стандартов, 1987.

9.4.4. Фрумкин В.Д., Рубичев Н.А. Теория вероятностей и статистика в метрологии и измерительной технике. М.: Машиностроение, 1987.

Приожение 1

Значения критерия Фишера

для различных уровней значимости

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | при , равном | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 12 | 16 |  |
|  | | | | | | | | | | |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,37 | 19,41 | 19,43 | 19,50 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,04 | 5,91 | 5,84 | 5,63 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,15 | 4,00 | 3,92 | 3,67 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,44 | 3,28 | 3,20 | 2,93 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,07 | 2,91 | 2,82 | 2,54 |
| 12 | 4,75 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,85 | 2,69 | 2,60 | 2,30 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,70 | 2,53 | 2,44 | 2,13 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,59 | 2,42 | 2,33 | 2,01 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,51 | 2,34 | 2,25 | 1,92 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,45 | 2,28 | 2,18 | 1,64 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,27 | 2,09 | 1,99 | 1,62 |
|  | 3,84 | 2,99 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,09 | 19,4 | 1,75 | 1,64 | 1,00 |
|  | | | | | | | | | | |
| 2 | 98,49 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,36 | 99,42 | 99,44 | 99,50 |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,80 | 14,37 | 14,15 | 13,46 |
| 6 | 13,74 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,10 | 7,72 | 7,52 | 6,88 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,03 | 5,67 | 5,48 | 4,86 |
| 10 | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,06 | 4,71 | 4,52 | 3,91 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,50 | 4,16 | 3,98 | 3,36 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,03 | 4,69 | 4,46 | 4,14 | 3,80 | 3,62 | 3,00 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 3,89 | 3,55 | 3,37 | 2,75 |
| 18 | 8,28 | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,25 | 4,01 | 3,71 | 3,37 | 3,20 | 2,57 |
| 20 | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,56 | 3,23 | 3,05 | 2,42 |
| 30 | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,17 | 2,84 | 2,66 | 2,01 |
|  | 6,64 | 4,60 | 3,78 | 3,32 | 3,02 | 2,80 | 2,51 | 2,18 | 1,99 | 1,00 |

**Лабораториялық жұмысты өңдеуге мысал**

Определить плотность материала в системе единиц СГС по результатам измерений объема *V*(объема вытесненной в мерной мензурке жидкости) и массы *т* двух образцов, изготовленных из анализируемого материала [9.4.3].

По результатам 10 измерений объема и 16 измерений массы первого образца было установлено:

* среднее арифметическое значение массы образца
* среднее арифметическое значение объема образца ;
* СКО ряда измерений массы
* СКО ряда измерений объема .

По результатам 12 измерений объема и 12 измерений массы второго образца было установлено:

* среднее арифметическое значение массы образца
* среднее арифметическое значение объема образца ;
* СКО ряда измерений массы
* СКО ряда измерений объема .

Зависимость между плотностью, объемом и массой определяется формулой. Чтобы воспользоваться этой зависимостью для оценки действительного значения плотности материала, в рассматриваемом примере необходимо определить средние из двух рядов измерений (для двух образцов) значения массы и объема. Для этого необходимо проверить равноточность результатов измерений в этих рядах.

Составим дисперсионное отношение по формуле (9.18) для рассматриваемых рядов измерений массы образцов

Найдем критическое значение критерия Фишера из прил.1 для

и;.

Поскольку , ряды измерений массы равноточны.

Дисперсионное отношение для рядов измерений объема:

Критическое значение критерия Фишера для и

;

Так как (см. прил. 1), то ряды измерений объема неравноточные.

Следовательно, среднее значение массы , г можно рассчитать как среднее арифметическое из масс двух образцов:

,

а среднее значение объема – как среднее взвешенное значение их объемов .

Для расчета определим по формуле (9.16) веса и рядов измерений и :

Полагая*,* найдем

;

Теперь, воспользовавшись формулой (9.14), вычислим среднее взвешенное значение отчетов,

Следовательно, действительное значение плотности материала г/, может быть оценено как:

.

Определим СКО погрешности этой оценки. Для этого предварительно рассчитаем значения частных производных функции пои при и .

Частная производная по составит, :

Частная производная по составит,

Вычислим по формулам и (9.17) дисперсии погрешностей оценок:

- для , ,

;

- для , ,

Воспользовавшись формулой (9.11), подсчитаем оценку СКО погрешности результата косвенных измерений г/

=0,05.

И наконец, приняв, что систематические погрешности при измерениях и были полностью исключены и распределение погрешности – нормальное (такое допущение в рассматриваемом случае вполне оправдано, поскольку при расчетах были объединены четыре ряда результатов измерений (), можно с вероятностью Р=0,95 утверждать, что действительное значение плотности материала, из которого изготовлены образцы, находится в пределах

от 7,04 – 2 0,05 = 6,94 г/до 7,04 + 2 0,05 = 7,14 г/.